Integrasi Numerik

(Bag. 2)

Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

Singularitas

- Kita akan kesulitan melakukan menghitung integrasi numerik apabila fungsi tidak terdefenisi di $x = t$, dalam hal ini $a < t < b$. Misalnya dalam menghitung integrasi

$$I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

- Fungsi $f(x) = \cos x/\sqrt{x}$ jelas tidak terdefinisi di $x = 0$ (ujung bawah selang).

- Begitu juga pada perhitungan integrasi

$$I = \int_{0.5}^{2} \frac{1}{x-1} dx$$

menggunakan *h* = 0.1, titik diskrit di *x* =1 tidak dapat dihitung sebab fungsi *f*(*x*) *= 1/*(*x*-1) tidak terdefinisi di *x =* 1.

- Fungsi yang tidak terdefinisi di *x = t,* untuk $a \le t \le b$, dinamakan fungsi **singular**.

- Singularitas harus dihilangkan dengan cara memanipulasi persamaan fungsi sedemikian sehingga ia tidak singular lagi.

Contoh: Ubahlah fungsi integrasi

$$I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

sehingga menjadi tidak singular lagi.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = \cos(x)/\sqrt{x}$ tidak terdefenisi di $x = 0$.

Misalkan

$x = u^2 \quad \rightarrow \quad dx = 2u\, du$

Batas-batas selang integrasi juga berubah

$x = 0 \rightarrow u = \sqrt{x} = 0$

$x = 1 \rightarrow u = \sqrt{x} = 1$

maka

$$I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\cos(u^2)}{u} (2u) du$$

$$I = \int_0^1 2\cos(u^2) du \quad \rightarrow \text{tidak singular lagi}$$

Contoh lain:

Ubahlah fungsi integrasi berikut sehingga menjadi tidak singular:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1-x^3)}}$$

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = 1/\sqrt{(\sin x)(1 - x^3)}$ tidak terdefenisi di $x = 0$ dan $x = 1$
Pecah integral I menjadi dua bagian, I_1 dan I_2 :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1-x^3)}} = \underbrace{\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1-x^3)}}}_{I_1\text{, singular di } x = 0} + \underbrace{\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1-x^3)}}}_{I_2\text{, singular } x = 1}$$

dengan $0 < a < 1$

Misalkan

$$x = u^2 \quad \rightarrow \; dx = 2u\, du$$

Batas-batas integrasi

$$x = a \;\; \rightarrow u = \sqrt{a}$$
$$x = 0 \;\; \rightarrow u = 0$$

Maka,

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{2u\;\; du}{\sqrt{(\sin u^2)(1-u^6)}} \; = \; 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{u\,/\,u}{\sqrt{\dfrac{(\sin u^2)(1-u^6)}{u^2}}} \; \text{du}$$

Mengingat

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u^2)}{u^2} = 1$$

maka

$$I_1 = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{(1 - u^6)}} \, du \rightarrow \text{tidak singular lagi}$$

$$I_2 = \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{(\sin x)(1 - x^3)}} \quad \rightarrow \text{ tidak dapat diterapkan pemisalan } x = u^2$$

Uraikan $(1 - x^3)$ menjadi $(1 - x)(1 + x + x^2)$:

$$I_2 = \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1-x)(1+x+x^2)}}$$

Misalkan

$$1 - x = u^2 \rightarrow - dx = 2u\ du$$

Batas-batas integrasi :

$$x = 1 \rightarrow u = \sqrt{(1 - x)} = 0$$
$$x = a \rightarrow u = \sqrt{(1 - a)}$$

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{1-a}} \frac{-2u\,du}{\sqrt{\left[\sin\left(1-u^2\right)\right]u^2\left[1+\left(1-u^2\right)+\left(1-u^2\right)^2\right]}}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{1-a}} \frac{u\,du}{\sqrt{\left[\sin\left(1-u^2\right)\right]\left(3 - 3\mathrm{u}^2 - u^4\right)}}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{1-a}} \frac{du}{\sqrt{\left[\sin\left(1-u^2\right)\right]\left(3 - 3\mathrm{u}^2 - u^4\right)}} \qquad \rightarrow \text{ tidak singular lagi}$$

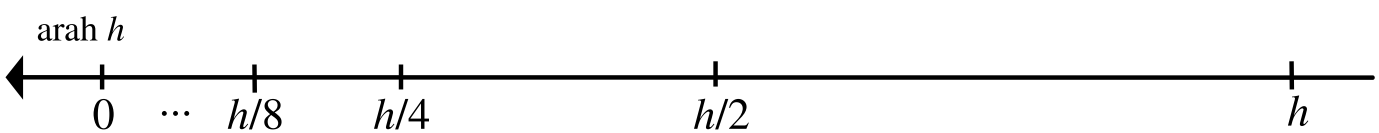
Penerapan Ekstrapolasi untuk Integrasi

- Misalkan $I(h)$ adalah perkiraan nilai integrasi dengan jarak antara titik data adalah h ($h < 1$).

- Dari persamaan galat kaidah integrasi (trapesium, Simpson 1/3, dll) yang dinyatakan dalam notasi orde:

$$E = O(h^p)$$

- dapat dilihat bahwa galat E semakin kecil bila digunakan h yang semakin kecil, seperti yang ditunjukkan oleh diagram garis berikut:



- Nilai sejati integrasi adalah bila h = 0, tetapi pemilihan h = 0 tidak mungkin kita lakukan di dalam rumus integrasi numerik sebab ia akan membuat nilai integrasi sama dengan 0.

- Yang dapat kita peroleh adalah perkiraan nilai integrasi yang lebih baik dengan melakukan ekstrapolasi ke h = 0.

- Ada dua macam metode ekstrapolasi yang digunakan untuk integrasi:
  1. Ekstrapolasi Richardson
  2. Ekstrapoalsi Aitken

Ekstrapolasi Richardson

Pandang kembali kaidah trapesium

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n} f_i + f_n) - \frac{(b-a)f''(t)}{12}h^2$$

yang dapat ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^2$$

dengan $I(h)$ adalah integrasi dengan menggunakan kaidah trapesium dengan jarak antar titik selebar h dan $C = \dfrac{(b-a)f''(t)}{12}$.

Secara umum, kaidah integrasi yang lain dapat kita ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^q$$

dengan C dan q adalah konstanta yang tidak bergantung pada h. Nilai q dapat ditentukan langsung dari orde galat kaidah integrasi, misalnya

kaidah trapesium, $O(h^2)$ $\rightarrow q = 2$
kaidah titik-tengah, $O(h^2)$ $\rightarrow q = 2$
kaidah 1/3 Simpson, $O(h^4)$ $\rightarrow q = 4$

- Tujuan ekstrapolasi Richardson ialah menghitung nilai integrasi yang lebih baik (*improve*) dibandingkan dengan I.

- Misalkan J adalah nilai integrasi yang lebih baik daripada I dengan jarak antar titik adalah h:

$$J = I(h) + Ch^q \qquad (1)$$

- Ekstrapolasikan h menjadi $2h$, lalu hitung integrasi numeriknya

$$J = I(2h) + C(2h)^q \qquad (2)$$

- Eliminasikan C dari kedua persamaan dengan menyamakan persamaan (1) dan persamaan (2):

$$I(h) + Ch^q = I(2h) + C(2h)^q \qquad (3)$$

sehingga diperoleh

$$C = \frac{I(h) - I(2h)}{(2^q - 1)h^q} \qquad (4)$$

Sulihkan (4) ke dalam (3) untuk memperoleh:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1}$$

yang merupakan persamaan **ekstrapolasi Ricahrdson**

Sebagai contoh, bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah trapesium ($q = 2$), maka ekstrapolasi Richardson-nya adalah

$$J = I(h) + \frac{1}{3}\ [\ I(h) - I(2h)\ ]$$

dan bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah 1/3 Simpson ($q = 4$), maka ekstrapolasi Richardson-nya adalah

$$J = I(h) + \frac{1}{15}\ [\ I(h) - I(2h)\ ]$$

Perhatikanlah bahwa suku 1/3 [$I(h)$ - $I(2h)$] dan suku 1/15 [$I(h)$ - $I(2h)$] merupakan **faktor koreksi**. Artinya, nilai taksiran integrasi $I(h)$ dapat ditingkatkan menjadi nilai yang lebih baik dengan menambahkan faktor koreksi tersebut.

- **Contoh**: Hitung kembali integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ dengan menggunakan ekstrapolasi Richardson, yang dalam hal ini *I*(*h*) dan *I*(2*h*) dihitung dengan kaidah trapesium dan *h* = 0.125.
- **Penyelesaian:**

Jumlah upaselang: *n* = (1 - 0)/0.125 = 8

Tabel titik-titik di dalam selang [0,1] dengan *h* = 0.125:

r	x_r	f_r
0	0	1
1	0.125	0.88889
2	0.250	0.80000
3	0.375	0.72727
4	0.500	0.66667
5	0.625	0.61538
6	0.750	0.57143
7	0.875	0.53333
8	1.000	0.50000

$I(h)$ adalah nilai integrasi dengan kaidah trapesium menggunakan $h = 0.125$:

$$I(h) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx h/2\ (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_8)$$

$$\approx 0.125/2\ [1 + 2(0.88889) + 2(0.80000) + ... + 0.50000)$$

$$\approx 0.69412$$

$I(2h)$ adalah nilai integrasi dengan kaidah trapesium menggunakan $2h = 0.250$:

$$I(2h) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx (2h)/2\ (f_0 + 2f_2 + 2f_4 + 2f_6 + f_8)$$

$$\approx 0.250/2\ [1 + 2(0.80000) + 2(0.66667) + 2(0.57143) + 0.50000)$$

$$\approx 0.69702$$

Nilai integrasi yang lebih baik, J, diperoleh dengan ekstrpolasi Richardson:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1}$$

yang dalam hal ini, $q = 2$, karena $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah trapesium (yang mempunyai orde galat = 2)

$$J = 0.69412 + \frac{0.69412 - 0.69702}{2^2 - 1} = 0.69315$$

Jadi, taksiran nilai integrasi yang lebih baik adalah 0.69315. Bandingkan dengan nilai integrasi sejatinya:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) \Big|_{x=0}^{x=1} = \ln(2) - \ln(1) = 0.69314718$$

yang apabila dibulatkan ke dalam 5 angka bena, $f(0.69314718) = 0.69315$, hasilnya tepat sama dengan nilai integrasi yang dihitung dengan ekstrapolasi Richardson

- **Contoh**: Perlihatkan bahwa bila *I*(*h*) dan *I*(*2h*) dihitung dengan kaidah trapesium, maka persamaan ekstrapolasi Richardson menyatakan kaidah Simpson 1/3.

Penyelesaian:

Kaidah 1/3 Simpson untuk sepasang upaselang adalah (lihat Gambar 6.10) adalah

$$I = \int_0^{2h} f(x)dx$$

$I(h)$ dan $I(2h)$ adalah perkiraan hasil integrasi dengan kaidah trapesium menggunakan pias masing-masing selebar h dan $2h$:

$$I(h) = {}^{h}/_{2}\,(f_0 + f_1) + {}^{h}/_{2}\,(f_1 + f_2) = {}^{h}/_{2}\,(f_0 + 2f_1 + f_2)$$
$$I(2h) = {}^{(2h)}/_{2}\,(f_0 + f_2) = h(f_0 + f_2)$$

Ekstrapolasi Richardson-nya (q = 2):

$$
\begin{aligned}
J &= I(h) + \frac{1}{3}\ [\ I(h) - I(2h)\ ] \\
&= {}^{h}/_{2}\ (f_0 + 2f_1 + f_2) + {}^{1}/_{3}\ ({}^{h}/_{2}\ \ (f_0 + 2f_1 + f_2) - h(f_0 + f_2)\ ) \\
&= {}^{h}/_{2}\ (f_0 + 2f_1 + f_2) + {}^{h}/_{6}\ (f_0 + 2f_1 + f_2) - {}^{h}/_{3}\ (f_0 + f_2) \\
&= {}^{h}/_{2}\ \ f_0 + hf_1 + {}^{h}/_{2}\ \mathrm{f}_2 + {}^{h}/_{6}\ \ f_0 + {}^{h}/_{3}\, f_1 + {}^{h}/_{6}\, f_2 - {}^{h}/_{3}\, f_0 - {}^{h}/_{3}\, f_2 \\
&= {}^{h}/_{2}\ \ f_0 + {}^{h}/_{6}\, f_0 - {}^{h}/_{3}\, f_0 + hf_1 + {}^{h}/_{3}\, f_1 + {}^{h}/_{2}\, f_2\ \ + {}^{h}/_{6}\, f_2 - {}^{h}/_{3}\, f_2 \\
&= {}^{h}/_{3}\ \ f_0 + {}^{4h}/_{3}\ f_1 + {}^{h}/_{3}\, f_2 \\
&= {}^{h}/_{3}\ (f_0 + 4f_1 + f_2)
\end{aligned}
$$

yang merupakan kaidah Simpson 1/3. J

- Persamaan ekstrapolasi Richardson memenuhi semua kaidah integrasi yang dirurunkan dengan metode pias maupun metode Newton-Cotes.

- Kita pun dapat menurunkan kaidah integrasi numerik yang baru dengan menerapkan ekstrapolasi Richardson.

- Misalkan bila *I*(*h*) dan *I*(*2h*) dihitung dengan kaidah Simpson 1/3, maka ekstrapolasi Richardson menyatakan **kaidah Boole** (buktikan!):

$$J = \int_0^{4h} f(x)dx = \frac{2h}{45} \left(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4 \right)$$

Metode Romberg

- Metode integrasi Romberg didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson untuk memperoleh nilai integrasi yang semakin baik.

- Sebagai catatan, setiap penerapan ekstrapolasi Richardson akan menaikkan order galat pada hasil solusinya sebesar dua:

  $$O(h^{2N}) \to O(h^{2N+2})$$

- Misalnya,bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah trapesium yang berorde galat $O(h^2)$, maka ekstrapolasi Richardson menghaslkan kaidah Simpson 1/3 yang berorde $O(h^4)$.

- Selanjutnya, bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah Simpson 1/3, ekstrapolasi Richardson menghaslkan kaidah Boole yang berorde $O(h^6)$.

Tinjau kembali persamaan ekstrapolasi Richardson:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1}$$

- Misalkan *I* adalah nilai integrasi sejati yang dinyatakan sebagai

$$I = A_k + Ch^2 + Dh^4 + Eh^6 + \ldots$$

yang dalam hal ini

$$h = (b - a)/n$$

dan

A_k = Perkiraan nilai integrasi dengan kaidah trapesium dan jumlah pias $n = 2^k$

Gunakan A_0, A_1,...A_k pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan B_1, B_2, ...,B_k , yaitu

$$B_k = A_k + \frac{A_k - A_{k-1}}{2^2 - 1}$$

Jadi, nilai I (yang lebih baik) sekarang adalah $I = B_k + D'h^4 + E'h^6 + \ldots$ dengan orde galat B_k adalah $O(h^4)$.

Selanjutnya, gunakan B_1, B_2 ,..., B_k pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan C_2, C_3,..., C_k, yaitu

$$C_k = B_k + \frac{B_k - B_{k-1}}{2^4 - 1}$$

Jadi, nilai I (yang lebih baik) sekarang adalah $I = C_k + E''h^6 + \ldots$ dengan orde galat C_k adalah $O(h^6)$.

Selanjutnya, gunakan C_2, C_3 ,..., C_k pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan $D3$, $D4$, ... , D_k , yaitu

$$D_k = C_k + \frac{C_k - C_{k-1}}{2^6 - 1}$$

Jadi, nilai I (yang lebih baik) sekarang adalah $I = D_k + E''' h^8 + \dots$ dengan orde galat D_k adalah $O(h^8)$. Demikian seterusnya.

- Dari runtunan tersebut, diperoleh tabel yang dinamakan **tabel Romberg** seperti berikut ini

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$	$O(h^{12})$	$O(h^{14})$
A_0						
A_1	B_1					
A_2	B_2	C_2				
A_3	B_3	C_3	D_3			
A_4	B_4	C_4	D_4	E_4		
A_5	B_5	C_5	D_5	E_5	F_5	
A_6	B_6	C_6	D_6	E_6	F_6	G_6

Nilai integrasi

yang lebih baik

- **Contoh**: Hitung integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ dengan metode Romberg (n = 8). Gunakan 5 angka bena.

Penyelesaian:

Jarak antar titik: $h = (1 - 0)/8 = 0.125$

Tabel titik-titik di dalam selang [0,1] dengan $h = 0.125$:

r	x_r	f_r
0	0	1.0000
1	0.125	0.88889
2	0.250	0.80000
3	0.375	0.72727
4	0.500	0.66667
5	0.625	0.61538
6	0.750	0.57143
7	0.875	0.53333
8	1.000	0.50000

$A_0 = h_0/2\ [f_0 + f_8] = 1/2\ (1 + 0.50000) = 0.75000$
$A_1 = h_1/2\ [f_0 + 2f_4 + f_8] = 0.5/2[1 + 2(0.66667) + 0.50000] = 0.70833$

$A_2 = h_2/2\ [f_0 + 2f_2 + 2f_4 + 2f_6 + f_8]$
$= 0.250/2[1 + 2(0.80000) + 2(0.66667) + 2(0.57143) + 0.50000] = 0.69702$

$A_3 = h_3/2\ [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_8]$
$= 0.125/2[1 + 2(0.88889) + 2(0.80000) + \ldots + 2(0.53333) + 0.50000]$
$= 0.69412$

$$B_1 = A_1 + \frac{A_1 - A_0}{2^2 - 1} = 0.69445$$ (A_k berorde 2, jadi $q = 2$)

$$B_2 = A_2 + \frac{A_2 - A_1}{2^2 - 1} = 0.69325$$

$$B_3 = A_3 + \frac{A_2 - A_1}{2^2 - 1} = 0.69315$$

$$C_2 = B_2 + \frac{B_2 - B_1}{2^4 - 1} = 0.69317$$ (B_k berorde 4, jadi $q = 4$)

$$C_3 = B_3 + \frac{B_3 - B_2}{2^4 - 1} = 0.69314$$

$$D_3 = C_3 + \frac{C_3 - C_3}{2^6 - 1} = 0.69314$$ (C_k berorde 6, jadi $q = 6$)

Tabel Romberg:

k	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
0	0.75000			
1	0.70833	0.69445		
2	0.69702	0.69325	0.69317	
3	0.69412	0.69315	0.69314	**0.69314**

Jadi, $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx 0.69314$

(Bandingkan dengan solusi sejatie $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = 0.693145$)

Ekstrapolasi Aitken

- Mengatasi kasus pada esktrapolasi Richradosn jika q tidak diketahui.
- Untuk kasus ini kita gunakan tiga buah perkiraan nilai *I*, yaitu *I(h)*, *I(2h),* dan *I(4h).*

$$J = I(h) - \frac{[I(h) - I(2h)]^2}{I(h) - 2\,I(2h) + I(4h)}$$

Integral Ganda

$$\iint_A f(x,y)dA = \int_a^b [\int_c^d f(x,y)dy]dx = \int_c^d [\int_a^b f(x,y)dx]dy$$

Tafsiran geometri dari integral ganda adalah menghitung volume ruang di bawah permukaan kurva $f(x,y)$ yang alasnya adalah berupa bidang yang dibatasi oleh garis-garis $x = a$, $x = b$, $y = c$, dan $y = d$.

Volume benda berdimensi tiga adalah

V = luas alas $\times$ tinggi

- Solusi integral lipat dua diperoleh dengan melakukan integrasi dua kali, pertama dalam arah *x* (dalam hal ini nilai, nilai *y* tetap),
- selanjutnya dalam arah *y* (dalam hal ini, nilai *x* tetap), atau sebaliknya.

- Dalam arah *x* berarti kita menghitung luas alas benda,
- sedangkan dalam arah *y* berarti kita mengalikan alas dengan tinggi untuk memperoleh volume benda.

- Tinggi benda dinyatakan secara tidak langsung dengan koefisien-koefisien w_i pada persamaan

- Misalkan integrasi dalam arah *x* dihitung dengan kaidah trapesium, dan integrasi dalam arah *y* dihitung dengan kaidah Simpson 1/3. Maka :

$$\int_c^d \int_a^b [f(x, y)dx]dy \approx \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{i=1}^{n} w_i f_{ij}$$

$$\approx \frac{\Delta y}{3} \; [\; \frac{\Delta x}{2} (f_{0,0} + 2f_{1,0} + 2f_{2,0} + \ldots + 2f_{n\text{-}1,0} + f_{n,0}) \; +$$

$$+ 4 \times \frac{\Delta x}{2} (f_{0,1} + 2f_{1,1} + 2f_{2,1} + \ldots + 2f_{n\text{-}1,1} + f_{n,1})$$

$$+ 2 \times \frac{\Delta x}{2} (f_{0,2} + 2f_{1,2} + 2f_{2,2} + \ldots + 2f_{n\text{-}1,2} + f_{n,2})$$

$$\ldots$$

$$+ 2 \times \frac{\Delta x}{2} (f_{0,m\text{-}2} + 2f_{1,m\text{-}2} + 2f_{2,m\text{-}2} + \ldots + 2f_{n\text{-}1,m\text{-}2} + f_{n,m\text{-}2})$$

$$+ 4 \times \frac{\Delta x}{2} (f_{0,m\text{-}1} + 2f_{1,m\text{-}1} + 2f_{2,m\text{-}1} + \ldots + 2f_{n\text{-}1,m\text{-}1} + f_{n,m\text{-}1})$$

$$+ \frac{\Delta x}{2} (f_{0,m} + 2f_{1,m} + 2f_{2,m} + \ldots + 2f_{n\text{-}1,0} + f_{n,m}) \,] \quad \text{(P.6.62)}$$

dengan

Δx = jarak antar titik dalam arah x,

Δy = jarak antar titik dalam arah y,

n = jumlah titik diskrit dalam arah x,

m = jumlah titik diskrit dalam arah y.

- **Contoh**: Diberikan tabel *f(x,y)* sebagai berikut:

Diberikan tabel *f(x,y)* sebagai berikut:

x \ y	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.5	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841

Hitung $\int_{0.2}^{0.6} \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)\,dxdy$

Penyelesaian:

Misalkan

- dalam arah x kita gunakan kaidah trapesium
- dalam arah y kita gunakan kaidah Simpson 1/3

Dalam arah x (y tetap):

$$y = 0.2 \quad ; \int_{1.5}^{3.0} f(x,y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x,0.2)dx$$

$$\approx \Delta x/2\ (f_{0,0} + 2f_{1,0} + 2f_{2,0} + f_{3,0})$$

$$\approx 0.5/2\ (0.990 + 2 \times 1.658 + 2 \times 2.520 + 4.090)$$

$$\approx 3.3140$$

$$y = 0.3 \quad ; \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.3)dx$$

$$\approx \Delta x/2 \; (f_{0,1} + 2f_{1,1} + 2f_{2,1} + f_{3,1})$$
$$\approx 0.5/2 \; (1.524 + 2 \; (\; 2.384 + 2 \times 3.800 + 6.136)$$
$$\approx 5.0070$$

$$y = 0.4 \; ; \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.4)dx \;\approx 6.6522$$

$$y = 0.5; \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.5)dx \;\approx 8.2368$$

$$y = 0.6; \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.6)dx \;\approx 9.7345$$

Dalam arah y :

$$\int_{0.2}^{0.6} f(x, y)dy \approx \Delta y/3\ (3.3140 + 4 \times 5.0070 + 2 \times 6.6522 + 4 \times 8.2368 + 9.7435)$$

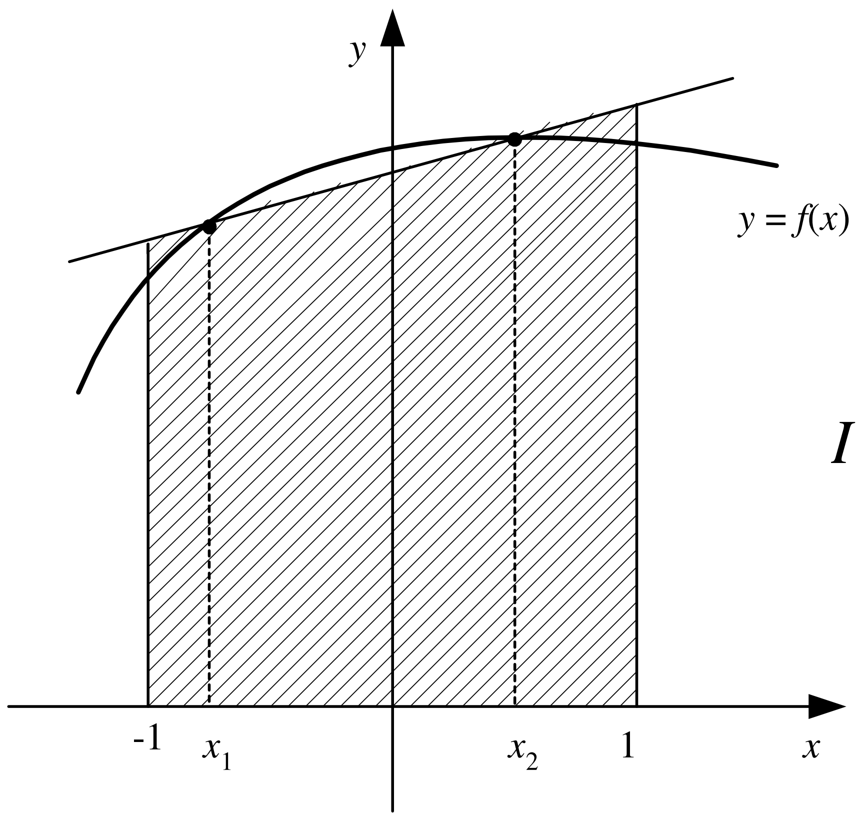
$$\approx 0.1/3\ (3.3140 + 4 \times 5.0070 + 2 \times 6.6522 + 4 \times 8.2368 + 9.7435)$$

$$\approx 2.6446$$

Jadi,

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dxdy \approx 2.6446$$

Kuadratur Gauss



Persamaan kuadratur Gauss

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

dengan c_1 , c_2 , x_1 , dan x_2 adalah sembarang nilai.

- Perhatikan bahwa bila dipilih x_1 = -1 , x_2 =1, dan c_1 = c_2 = 1, maka persamaan kuadratur Gauss menjadi kaidah trapesium:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(1) + f(-1)] \approx f(1) + f(-1)$$

dengan h = (1-(-1)) = 2.

- Jadi, kaidah trapesium memenuhi persamaan kuadratur Gauss

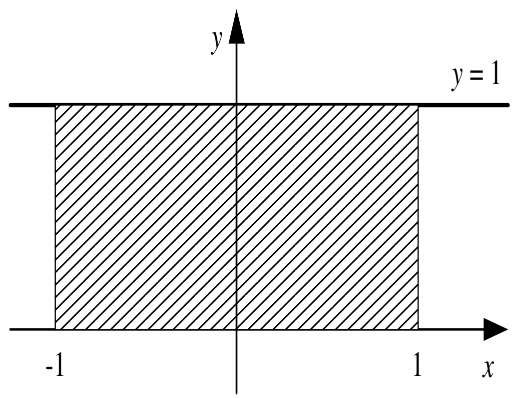
- Persamaan kuadratur Gauss mengandung empat buah peubah yang tidak diketahui (*unknown*), yaitu x_1 , x_2 , c_1 , dan c_2.

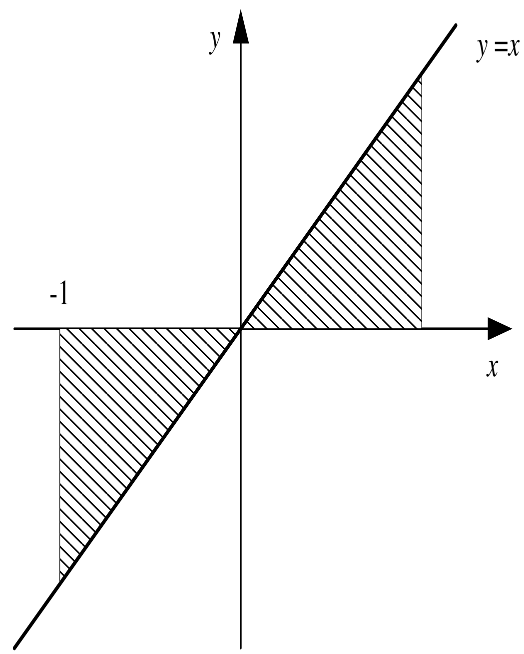
- Kita harus memilih x_1, x_2, c_1, dan c_2 sedemikian sehingga galat integrasinya minimum.

- Karena ada empat buah peubah yang tidak diketahui, maka kita harus mempunyai empat buah persamaan simultan yang mengandung x_1, x_2, c_1, dan c_2 .

- Di atas telah dikatakan bahwa kaidah trapesium bersesuaian dengan kuadratur Gauss.

- Dapat dilihat bahwa nilai integrasi numerik dengan kaidah trapesium akan tepat (galatnya = 0) untuk fungsi tetap dan fungsi lanjar. Misalnya untuk $f(x) = 1$ dan $f(x) = x$





$$f(x) = 1 \rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = x \Big|_{x=-1}^{x=1} = 1 - (-1) = 2 = c_1 + c_2$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = {}^1\!/_2\, x^2 \Big|_{x=-1}^{x=1} = {}^1\!/_2\,(1)^2 - {}^1\!/_2\,(-1)^2 = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

Kita memerlukan dua buah persamaan lagi agar x_1, x_2, c_1, dan c_2 dapat ditentukan.

Dari penalaran bahwa kaidah trapesium sejati untuk fungsi tetap dan fungsi lanjar, maka penalaran ini juga kita perluas dengan menambahkan anggapan bahwa integrasinya juga sejati untuk

$f(x) = x^2$ dan $f(x) = x^3$.

$$f(x) = x^2 \rightarrow \int_{-1}^{1} x\,dx = {}^1/_3\, x^3 \Big|_{x=-1}^{x=1} = 2/3 = c_1\, x_1{}^2 + c_2\, x_2{}^2$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 1/4\, x^4 \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0 = c_1\, x^3 + c_2\, x^3$$

- Sekarang, kita sudah mempunyai empat buah persamaan simultan

$$c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = 2/3$$

$$c_1 x^3 + c_2 x^3 = 0$$

yang bila dipecahkan menghasilkan:

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$x_1 = 1/\sqrt{3} = 0.577350269$$

$$x_{2\,=} -1/(3 = -0.577350269$$

Jadi,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3})$$

- Persamaan ini dinamakan **kaidah Gauss-Legendre 2-titik**.

- Dengan kaidah ini, menghitung integral *f*(*x*) di dalam selang [-1, 1] cukup hanya dengan mengevaluasi nilai fungsi *f* di *x* =1/√3 dan di *x* = -1√3.

Transformasi $\int_a^b f(x)\, dx$ Menjadi $\int_{-1}^1 f(t)\, dt$

Untuk menghitung integrasi

$$I = \int_{-1}^{1} f(x) dx$$

kita harus melakukan transformasi:

a. selang [a, b] menjadi selang [-1, 1]
b. peubah x menjadi peubah t
c. diferensial dx menjadi dt

Selang [a, b] dan [-1, 1] dilukiskan oleh diagram garis berikut:

Dari kedua diagram garis itu kita membuat perbandingan:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-a}{b-a} = \frac{t-(-1)}{1-(-1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-a}{b-a} = \frac{t+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 2a = (t + 1)(b - \mathrm{a})$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = (t + 1)(b - a) + 2a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{bt-at+b-a+2a}{2}$$

$$= \frac{a+b+bt-at}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{(a+b)+(b-a)t}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2}\,dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f[\frac{(a+b)+(b-a)t}{2}]\frac{(b-a)}{2}dt = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f[\frac{(a+b)+(b-a)t}{2}]dt$$

Contoh:

Hitung integral

$$\int_1^2 (x^2+1)dx$$

dengan kaidah Gauss-Legendre 2-titik

Penyelesaian:

$$a = 1\ , \qquad b = 2$$

$$x = \frac{(1+2)+(2-1)t}{2} = 1.5 + 0.5\ t$$

$$dx = \frac{2-1}{2}\ dt = 0.5\ dt$$

Transformasikan $\int_{1}^{2} f(x)dx$ menjadi $\int_{-1}^{1} f(t)dt$:

$$\int_{1}^{2} (x^2 + 1)dx = \int_{-1}^{1} [(1.5 + 0.5t)^2 + 1]0.5dt = 0.5 \int_{-1}^{1} [(1.5 + 0.5t)^2 + 1]dt$$

Jadi, dalam hal ini

$$f(t) = (1.5 + 0.5\ t)^2 + 1$$

maka

$$f(1/\sqrt{3}) = (1.5 + 0.5 \times 1/\sqrt{3})^2 + 1) = 4.1993587371$$
$$f(-1/\sqrt{3}) = (1.5 + 0.5 \times -1/\sqrt{3})^2 + 1) = 2.4673079295$$

Dengan demikian

$$\int_1^2 (x^2 + 1)dx = 0.5 \int_{-1}^{1} (1.5 + 0.52\ t)^2 + 1)\ dt \approx 0.5 \times \{f(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3})\}$$
$$\approx 3.33333333$$

Nilai integrasi sejatinya adalah:

$$\int_1^2 (x^2 + 1)dx = {}^1/_3\ x^3 + x \left|\begin{matrix} x = 2 \\ x = 1 \end{matrix}\right. = (8/3 + 2) + (1/3 + 1) = (7/3 + 1)$$
$$= 3.333333333$$

- Dibandingkan dengan metode Newton-Cotes (trapesium, 1/3 Simpson, dll), kaidah Gauss-Legendre 2-titik lebih sederhana dan lebih mangkus dalam operasi aritmetika,

- karena Gauss-Legendre 2-titik hanya membutuhkan dua buah evaluasi fungsi.

- Selain itu, ketelitiannya lebih tinggi dibandingkan dengan metode Newton-Cotes.

- Namun, kaidah Gauss-Legendre tidak dapat digunakan jika fungsi *f(x)* tidak diketahui secara eksplisit

Kaidah Gauss-Legendre 3-Titik

Metode Gauss-Legendre 3-Titik dapat ditulis sebagai

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dt \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

Parameter x_1 , x_2 , x_3 , c_1 , c_2 , dan c_3 dapat ditemukan dengan membuat penalaran bahwa kuadratur Gauss bernilai tepat untuk 6 buah fungsi berikut:

$$f(x) = 1 \; ; \; f(x) = x \; ; \qquad f(x) = x^2$$
$$f(x) = x^3 \; ; f(x) = x^4 ; \qquad f(x) = x^5$$

Dengan cara yang sama seperti pada penurunan kaidah Gauss-Legendre 2-titik, diperoleh 6 buah persamaan simultan yang solusinya adalah

$c_1 = 5/9$; $x_1 = -\sqrt{3/5}$
$c_2 = 8/9$; $x_2 = 0$
$c_3 = 5/9$; $x_1 = \sqrt{3/5}$

Jadi,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left[-\sqrt{(3/5)}\right] + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left[\sqrt{(3/5)}\right]$$

Kaidah Gauss-Legendre *n*-Titik

Penurunan kaidah Gauss-Legendre 2-titik dan Gauss-Legendre 3-titik dapat dirampatkan untuk menghasilkan kaidah Gauss-Legendre n-titik

$$\int_{-1}^{1} f(x)dt \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n)$$

Metode Gauss-Legendre n-titik $\int_{-1}^{1} f(x)dt \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n)$			
n	**Faktor bobot**	**Argumen fungsi**	**Galat pemotongan**
2	$c_1 = 1.000000000$ $c_2 = 1.000000000$	$x_1 = -0.577350269$ $x_2 = 0.577350269$	$\approx f^{(4)}(c)$
3	$c_1 = 0.555555556$ $c_2 = 0.888888889$ $c_3 = 0.555555556$	$x_1 = -0.774596669$ $x_2 = 0$ $x_1 = 0.774596669$	$\approx f^{(6)}(c)$
4	$c_1 = 0.347854845$ $c_2 = 0.652145155$ $c_3 = 0.652145155$ $c_3 = 0.347854845$	$x_1 = -0.861136312$ $x_2 = -0.339981044$ $x_3 = 0.339981044$ $x_4 = 0.861136312$	$\approx f^{(8)}(c)$
5	$c_1 = 0.236926885$ $c_2 = 0.478628670$ $c_3 = 0.568888889$ $c_4 = 0.478628670$ $c_5 = 0.236926885$	$x_1 = -0.906179846$ $x_2 = -0.538469310$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0.538469310$ $x_5 = 0.906179846$	$\approx f^{(10)}(c)$
6	$c_1 = 0.171324492$ $c_2 = 0.360761573$ $c_3 = 0.467913935$ $c_4 = 0.467913935$ $c_5 = 0.360761573$ $c_6 = 0.171324492$	$x_1 = -0.932469514$ $x_2 = -0.661209386$ $x_3 = -0.238619186$ $x_4 = 0.238619186$ $x_5 = 0.661209386$ $x_6 = 0.932469514$	$\approx f^{(12)}(c)$

Contoh Soal Terapan

Seorang penerjun payung terjun dari sebuah pesawat. Kecepatan penerjun sebagai fungsi dari waktu adalah [CHA91]:

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$

yang dalam hal ini

v = kecepatan penerjun dalam m/dt
g = tetapan gravitasi = 9.8 m/dt^2
m = massa penerjun = 68.1 kg
c = koefisien tahanan udara = 12.5 kg/detik

Misalkan kita ingi mengetahui seberapa jauh penerjun telah jatuh seteleh waktu tertentu t. Karena kecepatan merupakan turunan pertama dari fungsi jarak, maka jarak penerjun dari titik terjun (t = 0) adalah :

$$d = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})dt$$

Hitung seberapa jauh penerjun telah jatuh setelah waktu t =10 detik dengan bermacam-macam metode integrasi numerik.

Penyelesaian:

Persoalan kita adalah menghitung integrasi

$$d = \int_0^{10} \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})dt$$

Nilai *d* dengan bermacam-macam metode integrasi numerik diringkas dalam tabel berikut:

Metode Integrasi	*d* (meter)	Keterangan
Trapesium	289.4309571611	n = 128
Titik-tengah	289.4372411810	n = 128
Simpson 1/3	289.4351464539	n = 128
Simpson 3/8	289.4351465013	n = 243
Romberg	289.4351465113	n = 128
Gauss-Legendre 2-Titik	290.0144778200	
Gauss-Legendre 3-Titik	289.4392972900	
Gauss-Legendre 4-Titik	289.4351622600	